Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2019-20 учебный год.

4 класс

Время выполнения заданий — 180 минут ***Максимальный балл – 100***

*В каждой из предложенных вам задач нужно **написать правильный ответ** в бланке для ответов. Если вы хотите исправить свой ответ, следует перечеркнуть ранее написанный и рядом написать новый. Если в задаче требуется привести пример, достаточно указать один пример. **Никаких решений задач писать не нужно! Вы сдаете ТОЛЬКО бланк ответов, условия задач можно оставить себе. Пользоваться калькулятором НЕ разрешается.** Правильные ответы будут выложены на сайте www.kazan-math.info после олимпиады.*

Задача 1. Замените один знак «+» на «×» так, чтобы равенство стало верным: 1+2+3+4=5+6.

Задача 2. Гриша задумал число, прибавил к нему 1, потом результат умножил на 2, и полученное число разделил на 3. Затем он от результата отнял 4 и получил число 6. Какое число задумал Гриша?

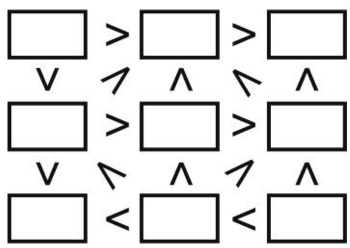
Задача 3. Генерал сказал про свой полк: «Если бы к моим солдатам прибавить половину их количества да еще сотню, то у меня была бы целая тысяча человек!» Сколько солдатов в этом полку?

Задача 4. Мальвина собрала букет из 21 цветка: ромашки, незабудки, васильки и лютики. Из них 16 — не ромашки, 7 — незабудки, 15 — не лютики. Сколько васильков собрала Мальвина?

Задача 5. Электронные часы показывают часы минуты и секунды, сейчас они показывают время: 20:00:02. Через какое время впервые все цифры на табло часов окажутся разными?

Задача 6. В примере на умножение некоторые цифры заменили звездочками: 1* × * = **1. Восстановите пример. Найдите все возможные варианты.

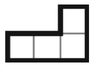
Задача 7. Три гнома разделили между собой добычу в 80 золотых монет. Если первый отдаст второму все свои монеты, то у второго и третьего гнома монет станет поровну. А если бы первый отдал все свои монеты третьему, то у третьего станет в четыре раза больше монет, чем у второго. Сколько монет было у первого гнома?



Задача 8. Расставьте числа от 1 до 9 (каждое по одному разу) в клетки на рисунке так, чтобы соблюдались все неравенства.

Задача 9. В 4«А» классе 31 ученик. На дискотеке одна из девочек танцевала с 4 мальчиками, вторая — с 5, третья — с 6, и т.д., а последняя — со всеми мальчиками класса. Сколько девочек и сколько мальчиков учится в классе?

Задача 10. У Яны есть карточки со всеми натуральными числами от 1 до 65 (каждое число по одному разу), а у Ани есть карточки с числами от 31 до 100 (каждое по одному разу). Сколько различных результатов можно получить складывая одно число из набора Яны и одно число из набора Ани?

Задача 11. Какое максимальное количество фигурок вида  можно вырезать из квадрата 7×7 по сторонам клеточек? Приведите пример разрезания. Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

Задача 12. В один понедельник Миша принес в школу свою любимую книгу и дал ее почитать Роме. Во вторник Рома отдал ее Лёне, а Лёня в четверг отдал ее Тагиру, а Тагир в следующий понедельник отдал его Тимуру и так далее, причем каждый держал у себя книгу вдвое дольше предыдущего. В результате книга вернулась к Мише опять в понедельник. Сколько ребят, кроме Миши, успели прочитать книгу, если прошло меньше 4 месяцев с того момента, как Миша принес книгу в школу?

Задача 13. Вместо каждой звездочки «*» в выражении: 2*1*1*1*2*0*1*9 поставьте знаки арифметических действий («+», «–», «×», «÷») так, чтобы в результате получилось 55. Разрешается использовать скобки.

Задача 14. Антон собрал коллекцию роботов, которых больше 250, но меньше 300. Когда он разложил роботов в коробки по 12, то два робота осталось. Тогда он решил разложить роботов в коробки по 16, но опять осталось два лишних робота. Сколько роботов у Антона?

Задача 15. Катя, Женя и Наташа ходят на кружки по математике, пению и плаванию. Каждая девочка ходит на один из этих кружков, и все девочки ходят на разные кружки. Если Катя занимается математикой, то Наташа не поет. Если Женя не поет, то Катя занимается математикой. Если Наташа не занимается математикой, то Женя плавает. Определите, какая девочка на какой кружок ходит?

Задача 16. В ящике у Андрюши лежат желтые, красные и синие кубики, всего 60 кубиков. Какие бы 37 кубиков не достал из ящика Андрюша, среди них обязательно будет хотя бы 15 желтых, а если Андрюша достанет 29 кубиков, то не обязательно. А какое наименьшее число кубиков нужно достать из ящика, чтобы среди них обязательно оказалось 25 одноцветных?

Задача 17. Закрасьте на доске 6×6 несколько клеток, чтобы каждая клетка (закрашенная и незакрашенная) граничила по стороне с нечетным количеством закрашенных.

Задача 18. На острове рыцарей и лжецов живут рыцари, которые говорят только правду, и лжецы, которые всегда лгут. На собрание пришли 18 жителей острова: 11 женщин и 7 мужчин. Сначала спросили у всех женщин: «Сколько лжецов среди женщин?». Каждая ответила — 7. Потом спросили у всех мужчин: «Сколько лжецов среди мужчин?». Каждый мужчина ответил — 0. Сколько всего лжецов могло быть из 18 человек? Укажите все возможные варианты.

Задача 19. Глеб составил из цифр от 1 до 6 (каждая используется по одному разу) однозначное, двузначное и трехзначное число. Сумма однозначного и двузначного числа равна 47. Двузначного и трехзначного — 358. Найдите сумму всех трех чисел.

Задача 20. Сколькими способами семь четвероклассников: Аня, Ваня, Митя, Катя, Даша, Саша и Паша — могут выстроиться в очередь в столовой, если Ваня обязательно хочет быть первым или вторым, а лучшие друзья — Саша, Даша и Паша — обязательно хотят стоять рядом (втроем в ряд в каком-то порядке).

<u>Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2019-20 учебный год</u>

5 класс

Время выполнения заданий — 180 минут ***Максимальный балл – 100***

В каждой из предложенных вам задач нужно ***написать правильный ответ*** *в бланке для ответов. Если вы хотите исправить свой ответ, следует перечеркнуть ранее написанный и рядом написать новый. Если в задаче требуется привести пример, достаточно указать один пример.* ***Никаких решений задач писать не нужно! Вы сдаете ТОЛЬКО бланк ответов, условия задач можно оставить себе. Пользоваться калькулятором НЕ разрешается.*** *Правильные ответы будут выложены на сайте www.kazan-math.info после олимпиады.*

Задача 1. Замените один знак «+» на «×» так, чтобы равенство стало верным: 1+2+3+4=5+6.

Задача 2. В теннисном турнире было несколько участников, и каждый сыграл с каждым по одному матчу. Сколько было участников, если всего сыграно 78 матчей?

Задача 3. Сколько трехзначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 2, 0, 1, 9, используя каждую цифру не более одного раза?

Задача 4. В очереди в столовой стоят четыре пятиклассника: Алина, Федя, Никита и Лена. Алина стоит не на первом месте, но перед Никитой и Леной. Алина и Лена не рядом. В каком порядке пятиклассники стоят в очереди?

Задача 5. Пол в квадратной комнате полностью покрыт одинаковыми квадратными плитками. На двух диагоналях в сумме 33 плитки. Сколько всего плиток на этом полу?

Задача 6. У портного есть 35 полотен ткани двух видов — хлопок и лен. Хлопковые полотна он раскроил на 5 частей, а льняные — на 4 части. Чтобы разрезать все хлопковые полотна, потребовалось сделать столько же разрезов, сколько разрезов понадобилось, чтобы разрезать все льняные. Сколько хлопковых и сколько льняных полотен было изначально? Один разрез режет ткань на две части.

Задача 7. Какое максимальное количество фигурок вида (уголок из 5 клеток) можно вырезать из квадрата 9×9 по сторонам клеточек? Приведите пример разрезания. Фигурки можно поворачивать и переворачивать.

Задача 8. Ира ходит в кружок по вышиванию по понедельникам, средам и пятницам каждую неделю (и даже в каникулы). На одном кружке она расходует четыре мотка ниток. Нитки продаются в наборах по 23 мотка. Какое наименьшее количество наборов надо купить Ире, чтобы ей точно хватило ниток на весь год (365 дней)?

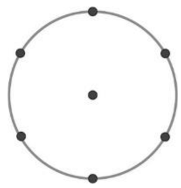
Задача 9. Вместо каждой звездочки «*» в выражении: 2*1*1*1*2*0*1*9 поставьте знаки арифметических действий («+», «–», «×», «÷») так, чтобы в результате получилось 62. Разрешается использовать скобки.

Задача 10. У Яны есть карточки со всеми натуральными числами от 23 до 74 (каждое число по одному разу), а у Ани есть карточки с числами от 34 до 100 (каждое по одному разу). Сколько различных результатов можно получить складывая одно число из набора Яны и одно число из набора Ани?

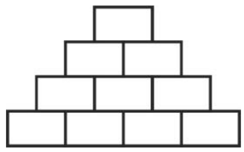
Задача 11. Каждый из 2019 человек за столом — рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда лжёт. Все люди по очереди сделали заявление: «Среди заявлений, сделанных до меня, ложных по крайней мере на два больше, чем истинных». Сколько лжецов могла быть за столом? Найдите все варианты.

Задача 12. Если сложить возраст Алии и Карима, то получится 26 лет. Сейчас Алие в три раза меньше лет, чем будет Кариму тогда, когда им вместе будет в пять раз больше лет, чем Кариму сейчас. Сколько лет сейчас Кариму?

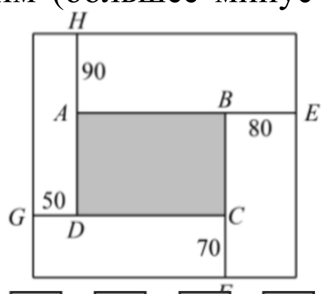
Задача 13. Миша хочет прийти в гости к Маше. Он знает, в каком доме она живет, но не знает номера ее квартиры. Маша говорит: «Номер моей квартиры — двузначное число, и ровно одно из следующих четырех утверждений ложно:» 1) Это число — простое. 2) Одна из цифр равна 9. 3) Это число — четное. 4) Это число делится на 7. В какой квартире живет Маша?



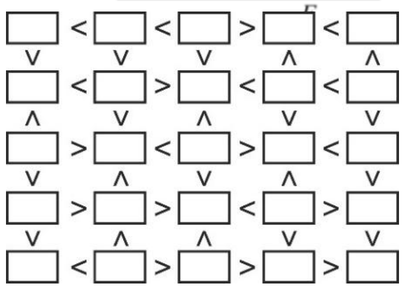
Задача 14. Оля отметила семь точек: шесть из них на окружности на одинаковом расстоянии друг от друга (см. рисунок), а седьмая — центр окружности. Сколько треугольников она может нарисовать так, чтобы все вершины были в отмеченных точках? Сторона может проходить через отмеченную точку.



Задача 15. Расставьте числа от 1 до 10, каждое — по одному разу, в прямоугольники на рисунке так, чтобы любое число, кроме чисел нижнего ряда, было равно разности двух чисел, стоящих по ним (большее минус меньшее).



Задача 16. Сумма периметров четырех белых прямоугольников на рисунке равна 2020 см. Известно, что AH = 90 см, GD = 50 см, BE = 80 см, CF = 70 см. Чему равен периметр серого прямоугольника $ABCD$?



Задача 17. Расставьте цифры 1, 2, 3, 4, 5 в клетках так, чтобы выполнялись все неравенства и в каждом столбце и в каждой строке все цифры были различными.

Задача 18. Закрасьте на доске 8×8 несколько клеток, чтобы каждая клетка (закрашенная и незакрашенная) граничила по стороне с нечетным количеством закрашенных.

Задача 19. В полдень из города в деревню вышел пешеход. Одновременно с ним из деревни в город выехал велосипедист. Через час пешеход оказался ровно посередине между городом и велосипедистом. Еще через 12 минут они встретились. Каждый, не останавливаясь, продолжил движение. Во сколько пешеход прибыл в деревню? Скорости пешехода и велосипедиста постоянны.

Задача 20. Учительница записала натуральные числа от 1 до 21. И сказала ученикам 5«М» класса убрать три числа и посчитать сумму оставшихся. Известно, что каждый из учеников убрал хотя бы по 2 последовательных числа и никакие два ученика не убрали одинаковые тройки чисел. Какое наибольшее количество учеников могли в результате получить 212?

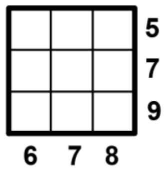
Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике. 2019-20 учебный год.

6 класс

Время выполнения заданий — 180 минут ***Максимальный балл – 100***

В каждой из предложенных вам задач нужно ***написать правильный ответ*** *в бланке для ответов. Если вы хотите исправить свой ответ, следует перечеркнуть ранее написанный и рядом написать новый. Если в задаче требуется привести пример, достаточно указать один пример.* ***Никаких решений задач писать не нужно! Вы сдаете ТОЛЬКО бланк ответов, условия задач можно оставить себе. Пользоваться калькулятором НЕ разрешается.*** *Правильные ответы будут выложены на сайте www.kazan-math.info после олимпиады.*

Задача 1. Расставьте в квадрате 3×3 числа (необязательно различные) так, чтобы суммы чисел по строкам равнялись 5, 7 и 9, а по столбцам — 6, 7 и 8, как показано на рисунке.



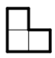
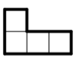
Задача 2. Вася пришел в магазин и купил себе наушники. Через неделю он зашел в магазин еще раз и увидел, что такие же наушники продаются со скидкой 50%. Поэтому он купил еще одни — про запас. Еще через неделю он снова зашел в этот магазин и увидел, что по сравнению с прошлым разом наушники подешевели еще на 18 рублей, поэтому он решил купить еще одни в подарок сестре. Всего за три прихода в магазин он потратил 1778 рублей. Сколько стоили наушники в первый раз?

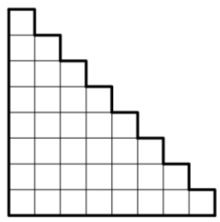
Задача 3. Пол в квадратной комнате полностью покрыт одинаковыми квадратными плитками. На двух диагоналях в сумме 37 плиток. Сколько всего плиток на этом полу?

Задача 4. Когда Джек был мальчиком, он мог пробежать 15 миль за три с половиной часа. Теперь он — дедушка, и у него получается пройти только 10 миль за четыре часа. На сколько минут больше уходит у него на то, чтобы преодолеть одну милю теперь, по сравнении с тем, когда он был мальчиком? (Мы считаем, что он движется с постоянной скоростью).

Задача 5. Три гнома: Балин, Двалин и Фарин, разделили между собой добычу в 100 золотых монет. Фарин заметил, что если он отдаст половину своих монет Двалину, то у Двалина и Балина станет поровну монет, а если он отдаст половину своих монет Балину, то у Балина станет в три раза больше монет, чем у Двалина. Сколько монет было у каждого из гномов?

Задача 6. Школьники Аня, Боря, Ваня, Галя, Даша и Женя встали в таком порядке по кругу и начали считаться. Сначала Аня говорит: «Один», потом Боря говорит: «Два» и так далее. Тот, кто называет число, содержащее девятку в записи (такое, как 49 или 94) или делящееся на девять, выбывает из круга и дальше счет продолжается без него. Кто останется последним?

Задача 7. Разрежьте фигуру на картинке по клеточкам на фигурки вида  и  так, чтобы присутствовали оба вида фигурок. Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



Задача 8. Вычислить $\dfrac{\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{18}}{\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}}$.

Задача 9. Найдите наибольшее шестизначное число, в котором сумма любых трех подряд идущих цифр делится на 4.

Задача 10. В магазине продаются конфеты разных цветов. Конфеты каждого цвета стоят одинаково, и целое число рублей. У Дамира есть некоторая сумма денег, которой хватает ровно на то, чтобы купить 12 красных конфет, или ровно на то, чтобы купить 14 зеленых конфет, или ровно на то, чтобы купить 15 синих конфет. Какая наименьшая сумма денег может быть у Дамира?

Задача 11. Двузначное число N при делении на 9 дает остаток 1, а при делении на 10 — остаток 2. Какой остаток оно дает при делении на 11?

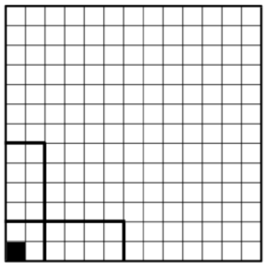
Задача 12. Расставьте в некоторых (можно во всех) промежутках между цифрами: 2 1 1 1 2 0 1 9 знаки арифметических действий («+», «–», «×», «÷») так, чтобы значение получившегося выражения равнялось 100. Можно использовать скобки.

Задача 13. Миша хочет прийти в гости к Маше. Он знает, в каком доме она живет, но не знает номера ее квартиры. Маша говорит: «Номер моей квартиры — двузначное число, и ровно одно из следующих четырех утверждений ложно». 1) Это число — простое. 2) Одна из цифр равна 9. 3) Это число — четное. 4) Это число делится на 7. В какой квартире живет Маша?

Задача 14. У Миши есть много машинок, каждая из них — красная, желтая, зеленая или синяя. Треть машинок — синие, четверть — красные. Семь машинок — зеленые. Какое наименьшее количество машинок могут быть желтыми?

Задача 15. У Васи есть калькулятор с четырьмя кнопками операций: [+3], [−5], [×7] и [:2]. Вася ввел в него число 12. Какое наибольшее число он сможет получить, нажав на каждую кнопку по одному разу (в каком-то порядке)?

Задача 16. У Пети есть квадрат 13×13. Он хочет вырезать из него прямоугольник, содержащий нижнюю левую клетку так, чтобы выполнялось **хотя бы одно** из двух условий: 1) длины обеих сторон прямоугольника были четными, 2) длины обеих сторон прямоугольника делились на 3. Сколькими способами он может это сделать? Прямоугольники, отличающиеся поворотом, такие как 2×6 и 6×2 считаются разными!



Задача 17. Придумайте и нарисуйте какую-нибудь клетчатую фигурку, у которой периметр в 1,25 раза больше, чем площадь. Площадь одной клетки равна 1. Длина стороны клетки равна 1.

Задача 18. Во дворе замка находится старый фонтан. Он связан механизмом со стрелочными часами на башне замка (часы показывают время в 12-часовом формате). Он работает, когда хотя бы одна из стрелок часов (минутная и/или часовая) находится между цифрами 1 и 2, или между цифрами 6 и 7 (если какая-то стрелка показывает ровно на одну из этих цифр, в этот момент фонтан работает). Сколько всего времени в течение суток работает этот фонтан?

Задача 19. На острове рыцарей (всегда говорят только правду) и лжецов (всегда лгут) встретились 6 местных жителей (но совершенно неизвестно, кто) и сделали каждый по заявлению: 1) «Лжецов среди нас больше половины». 2) «Рыцарей среди нас больше половины». 3) «Лжецов среди нас больше третьей части». 4) «Рыцарей среди нас больше третьей части». 5) «Лжецов среди нас не меньше, чем рыцарей». 5) «Рыцарей среди нас не меньше, чем лжецов». Сколько среди них могло оказаться рыцарей? Укажите все ответы.

Задача 20. В полдень из города в деревню вышел пешеход. Одновременно с ним из деревни в город выехал велосипедист. Через час пешеход оказался ровно посередине между городом и велосипедистом. Еще через 12 минут они встретились. Каждый, не останавливаясь, продолжил движение. Во сколько пешеход прибыл в деревню? Скорости пешехода и велосипедиста постоянны.

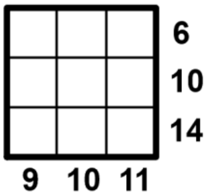
Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике.   2019-20 учебный год.

7 класс

Время выполнения заданий — 240 минут   ***Максимальный балл – 100***

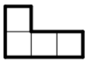
*В каждой из предложенных вам задач нужно **написать правильный ответ** в бланке для ответов. Если вы хотите исправить свой ответ, следует перечеркнуть ранее написанный и рядом написать новый. Если в задаче требуется привести пример, достаточно указать один пример. **Никаких решений задач писать не нужно! Вы сдаете ТОЛЬКО бланк ответов, условия задач можно оставить себе. Пользоваться калькулятором НЕ разрешается.** Правильные ответы будут выложены на сайте www.kazan-math.info после олимпиады.*

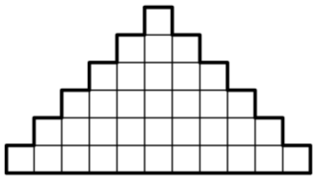
Задача 1. Расставьте в квадрате 3×3 числа (необязательно различные) так, чтобы суммы чисел по строкам равнялись 6, 10 и 14, а по столбцам — 9, 10 и 11, как показано на рисунке.



Задача 2. Вася пришел в магазин и купил себе наушники. Через неделю он зашел в магазин еще раз и увидел, что такие же наушники продаются со скидкой 50%. Поэтому он купил еще одни — про запас. Еще через неделю он снова зашел в этот магазин и увидел, что по сравнению с прошлым разом наушники подорожали на 18 рублей, но их цена все равно была привлекательной, поэтому он решил купить еще одни в подарок сестре. Всего за три прихода в магазин он потратил 1714 рублей. Сколько стоили наушники в первый раз?

Задача 3. У Алисы есть два контейнера. Первый был наполнен водой на 5/6 от своего объема, а второй — пустой. Она перелила всю воду во второй контейнер. После этого второй контейнер оказался наполнен на 3/4 своего объема. Чему равно отношение объемов первого и второго контейнеров?

Задача 4. Разрежьте фигуру на картинке по клеточкам на фигурки вида  и  так, чтобы присутствовали оба вида фигурок. Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



Задача 5. Машина Джона расходует галлон бензина на каждые 35 миль пути, а бензобак вмещает ровно 14 галлонов. Однажды Джон с полным баком бензина отправился в поездку. Проехав 350 миль, он купил еще 8 галлонов бензина и продолжил путь. Когда он доехал до места назначения, бензобак был наполовину пуст. Сколько миль проехал Джон в тот день?

Задача 6. Школьники Аня, Боря, Ваня, Галя, Даша и Женя встали в таком порядке по кругу и начали считаться. Сначала Аня говорит: «Один», потом Боря говорит: «Два» и так далее. Тот, кто называет число, содержащее семерку в записи (такое, как 47 или 74) или делящееся на семь, выбывает из круга и дальше счет продолжается без него. Кто останется последним?

Задача 7. В магазине продаются конфеты разных цветов. Конфеты каждого цвета стоят одинаково, и целое число рублей. У Дамира есть некоторая сумма денег, которой хватает ровно на то, чтобы купить 12 красных конфет, или ровно на то, чтобы купить 14 зеленых конфет, или ровно на то, чтобы купить 15 синих конфет, или ровно на то, чтобы купить N желтых конфет. Желтая конфета стоит 20 рублей. Какое наименьшее значение может принимать число N?

Задача 8. Найдите наибольшее семизначное число, в котором сумма любых трех подряд идущих цифр делится на 4.

Задача 9. Расставьте в некоторых (можно во всех) промежутках между цифрами: 2 1 1 1 2 0 1 9 знаки арифметических действий («+», «–», «×», «÷») так, чтобы значение получившегося выражения равнялось 64. Можно использовать скобки.

Задача 10. Вычислите $\left(21\frac{1}{6}-(8{,}723:6\frac{1}{2}+1\frac{4}{5}\cdot 0{,}31)\right):\left(17-2\frac{1}{8}\cdot 5\frac{1}{3}\right)$.

Задача 11. Три гнома: Балин, Двалин и Фарин, разделили между собой добычу в 120 золотых монет. Фарин заметил, что если он отдаст половину своих монет Двалину, то у Двалина и Балина станет поровну монет, а если он отдаст половину своих монет Балину, то у Балина станет в пять раз больше монет, чем у Двалина. Сколько монет было у каждого из гномов?

Задача 12. У Миши есть много машинок, каждая из них — красная, желтая, зеленая или синяя. Треть машинок — синие, 30% машинок — красные. Четырнадцать машинок — зеленые. Какое наименьшее количество машинок могут быть желтыми?

Задача 13. Пол в квадратной комнате полностью покрыт одинаковыми квадратными плитками. На двух диагоналях в сумме 505 плиток. Сколько всего плиток на этом полу?

Задача 14. Сколько существует натуральных делителей числа 15^9, каждый из которых является либо точным квадратом, либо точным кубом (или и то, и другое)?

Задача 15. Придумайте и нарисуйте какую-нибудь клетчатую фигурку, у которой периметр в 7/6 раза больше, чем площадь. Площадь одной клетки равна 1. Длина стороны клетки равна 1.

Задача 16. Вася расставляет три знака умножения и три знака сложения (в каком-то порядке) в шесть пустых квадратиков между цифрами 7☐1☐5☐3☐4☐2☐6, а затем вычисляет получившееся выражение. Скобок в этом выражении нет! Какое наибольшее и какое наименьшее число он сможет получить?

Задача 17. На острове живут рыцари (всегда говорят только правду), лжецы (всегда лгут) и мошенники (говорят что угодно на свое усмотрение). Однажды встретились 6 жителей острова (но совершенно неизвестно, кто) и сделали каждый по заявлению: 1) «Лжецов среди нас больше половины». 2) «Рыцарей среди нас больше половины». 3) «Хитрецов среди нас больше половины». 4) «Лжецов среди нас больше третьей части». 5) «Рыцарей среди нас больше третьей части». 6) «Хитрецов среди нас больше третьей части». Сколько среди них могло оказаться рыцарей? Укажите все ответы.

Задача 18. В полдень из города в деревню выехал велосипедист. Одновременно с ним из деревни в город выехал мотоциклист. Через час велосипедист оказался вдвое ближе к мотоциклисту, чем к городу. Через некоторое время они встретились и каждый, не останавливаясь, продолжил движение. После этого, в 13 часов 12 минут мотоциклист оказался втрое ближе к велосипедисту, чем к городу. Во сколько велосипедист прибыл в деревню? Скорости мотоциклиста и велосипедиста постоянны.

Задача 19. Во дворе замка находится старый фонтан. Он связан механизмом со стрелочными часами на башне замка (часы показывают время в 12-часовом формате). Он работает, когда хотя бы одна из стрелок часов (минутная и/или часовая) находится между цифрами 1 и 2, или между цифрами 4 и 5, или между цифрами 7 и 8 (если какая-то стрелка показывает ровно на одну из этих цифр, в этот момент фонтан работает). Сколько всего времени в течение суток работает этот фонтан?

Задача 20. Найдите наибольшее двузначное число N такое, что произведение первых N натуральных чисел *не делится* нацело на сумму первых N натуральных чисел.

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2019 год

8 класс

Продолжительность – 4 часа (240 минут). *Максимальный балл – 35*

8-1. Начинающий цветовод высадил на свою грядку ромашки, лютики и маргаритки. Когда они взошли, оказалось, что ромашек в 5 раз больше, чем не-ромашек, лютиков – в 5 раз меньше, чем не-лютиков. Какую долю среди проросших растений занимают маргаритки?

8-2. Коля старше Толи, и возраст каждого из них — целое число, меньшее 100. Если поменять местами цифры возраста Коли, получится возраст Толи. Более того, разность между квадратами их возрастов является квадратом целого числа. Сколько лет каждому?

8-3. Вика записывает свои оценки с начала года. В начале второй четверти она получила пятерку, вследствие чего доля пятерок увеличилась на 0,15. После очередной оценки доля пятерок увеличилась еще на 0,1. Сколько пятерок ей нужно теперь получить, чтобы увеличить их долю еще на 0,2?

8-4. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, лежащей на стороне CD. Обозначим точку пересечения биссектрис углов C и D через N. Докажите, что MN параллельно AD.

8-5. Трудолюбивая Ася перемножила два трехзначных числа, а ленивый Петя просто написал их подряд одно за другим. Результат Пети оказался в 7 раз больше, чем у Аси. Какие числа она перемножала?

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2019 год

8 класс

Продолжительность – 4 часа (240 минут). *Максимальный балл – 35*

8-1. Начинающий цветовод высадил на свою грядку ромашки, лютики и маргаритки. Когда они взошли, оказалось, что ромашек в 5 раз больше, чем не-ромашек, лютиков – в 5 раз меньше, чем не-лютиков. Какую долю среди проросших растений занимают маргаритки?

8-2. Коля старше Толи, и возраст каждого из них — целое число, меньшее 100. Если поменять местами цифры возраста Коли, получится возраст Толи. Более того, разность между квадратами их возрастов является квадратом целого числа. Сколько лет каждому?

8-3. Вика записывает свои оценки с начала года. В начале второй четверти она получила пятерку, вследствие чего доля пятерок увеличилась на 0,15. После очередной оценки доля пятерок увеличилась еще на 0,1. Сколько пятерок ей нужно теперь получить, чтобы увеличить их долю еще на 0,2?

8-4. Дан параллелограмм $ABCD$. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M, лежащей на стороне CD. Обозначим точку пересечения биссектрис углов C и D через N. Докажите, что MN параллельно AD.

8-5. Трудолюбивая Ася перемножила два трехзначных числа, а ленивый Петя просто написал их подряд одно за другим. Результат Пети оказался в 7 раз больше, чем у Аси. Какие числа она перемножала?

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2019 год

9 класс

Продолжительность – 4 часа (240 минут). *Максимальный балл – 35*

9-1. Почтальон Печкин подсчитал, что две трети пути он шел пешком (скорость 5 км/ч), и только треть времени – ехал на велосипеде (скорость 8 км/ч). Не ошибся ли он в расчетах?

9-2. Школьная волейбольная команда провела несколько матчей. После того, как она выиграла очередной матч, доля побед стала на величину 1/6 больше. Чтобы увеличить долю побед ещё на 1/6, волейболистам пришлось выиграть ещё два матча подряд. Какое минимальное число побед нужно одержать команде, чтобы доля выигрышей увеличилась ещё на 1/6?

9-3. Можно ли среди чисел $2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, найти хотя бы один куб целого числа?

9-4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 90°, точка M — середина AB. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная CM, пересекает сторону BC в точке P. Докажите, что $\angle AMC = \angle BMP$.

9-5. На доске записан пример на умножение двух трехзначных чисел. Если вместо знака умножения написать 0, получим семизначное число, которое в целое число раз больше произведения. Во сколько именно?

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2019 год

9 класс

Продолжительность – 4 часа (240 минут). *Максимальный балл – 35*

9-1. Почтальон Печкин подсчитал, что две трети пути он шел пешком (скорость 5 км/ч), и только треть времени – ехал на велосипеде (скорость 8 км/ч). Не ошибся ли он в расчетах?

9-2. Школьная волейбольная команда провела несколько матчей. После того, как она выиграла очередной матч, доля побед стала на величину 1/6 больше. Чтобы увеличить долю побед ещё на 1/6, волейболистам пришлось выиграть ещё два матча подряд. Какое минимальное число побед нужно одержать команде, чтобы доля выигрышей увеличилась ещё на 1/6?

9-3. Можно ли среди чисел $2^{2^n} + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, найти хотя бы один куб целого числа?

9-4. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 90°, точка M — середина AB. Прямая, проходящая через точку A и перпендикулярная CM, пересекает сторону BC в точке P. Докажите, что $\angle AMC = \angle BMP$.

9-5. На доске записан пример на умножение двух трехзначных чисел. Если вместо знака умножения написать 0, получим семизначное число, которое в целое число раз больше произведения. Во сколько именно?

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2019 год

10 класс

Продолжительность – 4 часа (240 минут). *Максимальный балл – 35*

10-1. У Пятачка есть воздушные шарики пяти цветов. Ему удалось расположить их в ряд таким образом, что для любых двух различных цветов в ряду всегда найдутся два соседних шарика этих цветов. Какое наименьшее количество воздушных шариков могло быть у Пятачка?

10-2. Действительные числа a, b и c таковы, что $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$ и $|c| \geq |a + b|$. Докажите, что $a + b + c = 0$.

10-3. Решить систему $\begin{cases} 2y = |2x+3| - |2x-3| \\ 4x = |y+2| - |y-2| \end{cases}$

10-4. В остроугольном треугольнике ABC биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямые AB и B_1C_1 пересекаются в точке M, прямые BC и A_1B_1 — в точке N. Верно ли, что прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC?

10-5. Из 80 одинаковых деталей лего собрали несколько фигурок, причем число использованных деталей во всех фигурках разное. На изготовление трех самых маленьких фигурок ушло 14 деталей, в трех самых больших использовано суммарно 43. Сколько собрали фигурок? Сколько деталей в самой большой фигурке?

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2019 год

10 класс

Продолжительность – 4 часа (240 минут). *Максимальный балл – 35*

10-1. У Пятачка есть воздушные шарики пяти цветов. Ему удалось расположить их в ряд таким образом, что для любых двух различных цветов в ряду всегда найдутся два соседних шарика этих цветов. Какое наименьшее количество воздушных шариков могло быть у Пятачка?

10-2. Действительные числа a, b и c таковы, что $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$ и $|c| \geq |a + b|$. Докажите, что $a + b + c = 0$.

10-3. Решить систему $\begin{cases} 2y = |2x+3| - |2x-3| \\ 4x = |y+2| - |y-2| \end{cases}$

10-4. В остроугольном треугольнике ABC биссектрисы углов A, B и C пересекают описанную окружность треугольника в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Прямые AB и B_1C_1 пересекаются в точке M, прямые BC и A_1B_1 — в точке N. Верно ли, что прямая MN проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC?

10-5. Из 80 одинаковых деталей лего собрали несколько фигурок, причем число использованных деталей во всех фигурках разное. На изготовление трех самых маленьких фигурок ушло 14 деталей, в трех самых больших использовано суммарно 43. Сколько собрали фигурок? Сколько деталей в самой большой фигурке?

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2019 год

11 класс

Продолжительность – 4 часа (240 минут). *Максимальный балл – 35*

11-1. Даны три числа. Если каждое из них уменьшить на 1, то их произведение тоже уменьшится на 1. Если все исходные числа уменьшить на 2, то их произведение тоже уменьшится на 2.

а) На сколько уменьшится произведение, если все исходные числа уменьшить на 3?

б) Укажите какие-нибудь три числа, удовлетворяющие условию задачи.

11-2. В некоторой системе координат построили график функции $y = \cos^2 x$. После чего координатные оси стерли. Постройте систему координат так, чтобы эта же линия стала графиком функции $z = \cos t$ в новой системе координат.

11-3. Числа a, b и c таковы, что $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$ и $|c| \geq |a + b|$. Докажите, что $a + b + c = 0$.

11-4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1 проведена диагональ AC_1. Для каждой точки N, лежащей на этой диагонали, построено сечение куба плоскостью, перпендикулярной AC_1 и проходящей через N. Пусть P – периметр этого сечения. Постройте график зависимости P от величины $x = AN$.

11-5. Дед Мороз готовит подарки. Он разложил 115 конфет в пакеты, причем все они разные по числу конфет. В трех самых маленьких подарках находится 20 конфет, в трех самых больших – 50. Во сколько пакетов разложены конфеты? Сколько конфет в самом маленьком подарке?

Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по математике
2019 год

11 класс

Продолжительность – 4 часа (240 минут). *Максимальный балл – 35*

11-1. Даны три числа. Если каждое из них уменьшить на 1, то их произведение тоже уменьшится на 1. Если все исходные числа уменьшить на 2, то их произведение тоже уменьшится на 2.

а) На сколько уменьшится произведение, если все исходные числа уменьшить на 3?

б) Укажите какие-нибудь три числа, удовлетворяющие условию задачи.

11-2. В некоторой системе координат построили график функции $y = \cos^2 x$. После чего координатные оси стерли. Постройте систему координат так, чтобы эта же линия стала графиком функции $z = \cos t$ в новой системе координат.

11-3. Числа a, b и c таковы, что $|a| \geq |b + c|$, $|b| \geq |c + a|$ и $|c| \geq |a + b|$. Докажите, что $a + b + c = 0$.

11-4. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной 1 проведена диагональ AC_1. Для каждой точки N, лежащей на этой диагонали, построено сечение куба плоскостью, перпендикулярной AC_1 и проходящей через N. Пусть P – периметр этого сечения. Постройте график зависимости P от величины $x = AN$.

11-5. Дед Мороз готовит подарки. Он разложил 115 конфет в пакеты, причем все они разные по числу конфет. В трех самых маленьких подарках находится 20 конфет, в трех самых

больших – 50. Во сколько пакетов разложены конфеты? Сколько конфет в самом маленьком подарке?